岩木耕平 集中講義 3 東北大学数学教育

2017-06-08
黒木玄記

4. クラスター代数との関係

Fomin-Zelevinsky 2002〜
Fock-Goncharov

日本語で読めるもの：数理科学 2015年3月 "団代数をめぐって" 中西知樹編

クラスター代数とは

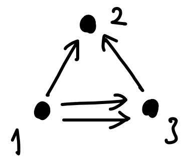
$n \geq 1$ 固定

定 種 (seed) とは 3つ組 (B, x, y)

$B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n$ ：歪対称(化可能)行列, $b_{ij} \in \mathbb{Z}$

$x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_i)_{i=1}^n$ ：変数の組

注 B は度々箙 (えびら, quiver) と同一視される。

例 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow$ 

$n = 3$

$b_{ij} = \#(\overset{i}{\bullet} \to \overset{j}{\bullet}) - \#(\overset{i}{\bullet} \longleftarrow \overset{j}{\bullet})$

定 変異 (mutation) とは種から別の種を作る操作

ここでは FZ とは少し異なる version である "符号付き変異" を導入する。

$\varepsilon = \pm 1$ と $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して,

$$\mu_k^{(\varepsilon)} : (B, x, y) \longmapsto (B', x', y') = ([b'_{ij}], (x'_i), (y'_i))$$

を次で定める：

$$b'_{ij} := \begin{cases} -b_{ij} & (i = k \text{ or } j = k) \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+ & (i \neq k \text{ and } j \neq k) \end{cases}$$

ここで, $[a]_+ := \max\{a, 0\}$.

つづき

$$y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & (i=k) \\ y_i\, y_k^{[\varepsilon b_{ki}]_+} & (i\neq k) \end{cases}$$

$$\hat{y}_i := y_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{ji}}$$

$$x'_i = \begin{cases} x_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{[-\varepsilon b_{jk}]_+}\right)\left(1+\hat{y}_k^{\varepsilon}\right) & (i=k) \\ x_i & (i\neq k) \end{cases}$$

定義終 □

注 mutationのよくある式は

$$x'_k = x_k^{-1}\left(\prod x_i^{b_{ik}} + \prod x_i^{b_{ki}}\right) = x_k^{-1}\left(\prod x^{b_{ik}}\right)\left(1+\prod x_i^{\star}\right)$$ □

注 y_iは係数, これは係数が"トロピカル半体"に値をもつ係数付きのクラスター代数の変異でεを"トロピカル符号"に取ったものに一致する. □

レポート問題 6

上で定めた $\hat{y}_i = y_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{ji}}$ のmutationが次の形になることを示せ:

$$\hat{y}'_i = \begin{cases} \hat{y}_k^{-1} & (i=k), \\ \hat{y}_i\, \hat{y}_k^{[\varepsilon b_{ki}]_+}\left(1+\hat{y}_k^{\varepsilon}\right)^{-b_{ki}} & (i\neq k). \end{cases}$$ □

今日: WKB解析における様々な量がクラスター代数を実現することを見る.

WKB $\longrightarrow$ $B=[b_{ij}]$ or 箙 (quiver)

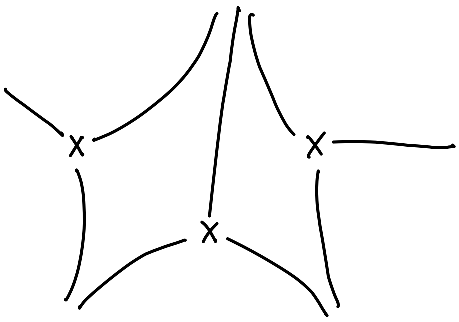
例 Stokesグラフ $\longmapsto$ $B=[b_{ij}]$ or quiver

仮定
- 変わり点はすべて単純である.
- 単純極はない. (この条件を外すと, Chekhov-Schapiraの一般クラスター代数が現われる. orbifoldの三角形分割…)
- StokesグラフはStokesセグメントを持たない.
(方向θはこうなるようにfixする.)

以下, しばらく方向θは固定されていると仮定する.

$\boxed{例}$ $Q(x) = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \mathbb{C},\ \text{generic})$

x平面



Stokesグラフは genericの仮定のもとで常に左のようになる。

$\boxed{事実}$ (Strebel, Quadratic differential)

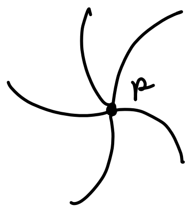
- $Q(x)dx^2$ の m位の極には (m−2)本のStokes曲線の漸近方向がある (m≧3).

$x = \frac{1}{z}$ とおくと、 $Q(x)dx^2 = \left(\frac{1}{z^3} + \frac{a}{z} + b\right)\frac{dz^2}{z^4} = \left(\frac{1}{z^7} + \cdots\right)dz^2$.

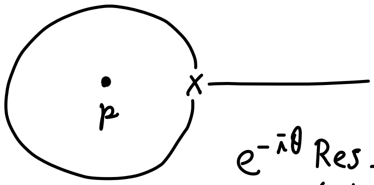
$m = 7$ 位の極. $x = \infty$ に $m-2 = 5$ 方向からStokes曲線が流れこんでいる.

$\boxed{事実続き}$ • 位数2の極のまわりのStokes曲線は次の2パターンのどちらか!

①



②

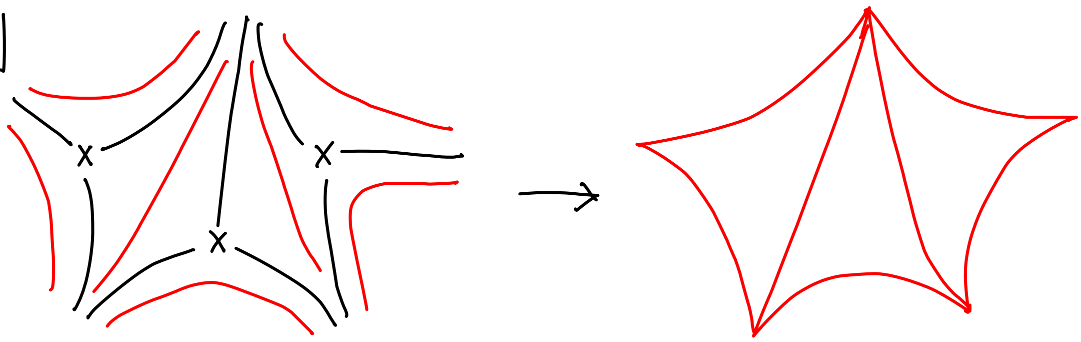


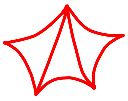
$e^{-i\theta}\operatorname{Res}_{x=p}\sqrt{Q}\,dx \in i\mathbb{R}$ のとき

各Stokes領域内の軌道をひとつずつ書く.

$\operatorname{Im}\left(e^{-i\theta}\int^x \sqrt{Q}\,dx\right) = \text{const.}$ で定まる曲線

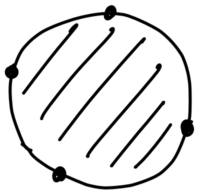
x平面



右上の  のように境界付き曲面の三角形分割が得られる.

全ての変わり点は単純なことより

以上のアイデアは $\begin{cases} \text{Gaiotto-Moore-Neitzke} \\ \text{Bridgeland-Smith} \end{cases}$

注 • m位の極 $m \geqq 3$ $\longmapsto$  $(m-2)$点付き境界成分

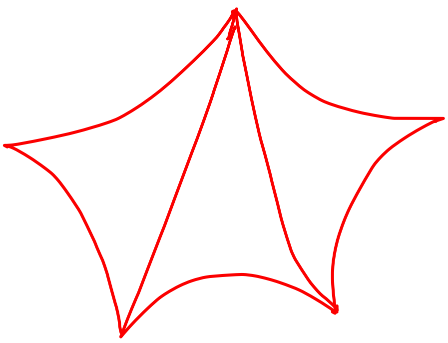
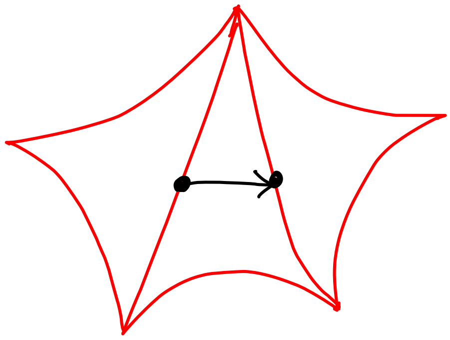
• 2位の極 $\longmapsto$ • 穴 (puncture)

だから正確には、境界付き穴あき曲面の三角形分割ができる

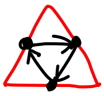
• Stokes領域は四角形または二角形、

二角形のStokes領域 $\longmapsto$ 境界成分

四角形のStokes領域 $\longmapsto$ 内辺 (diagonal)

 $\longmapsto$ 

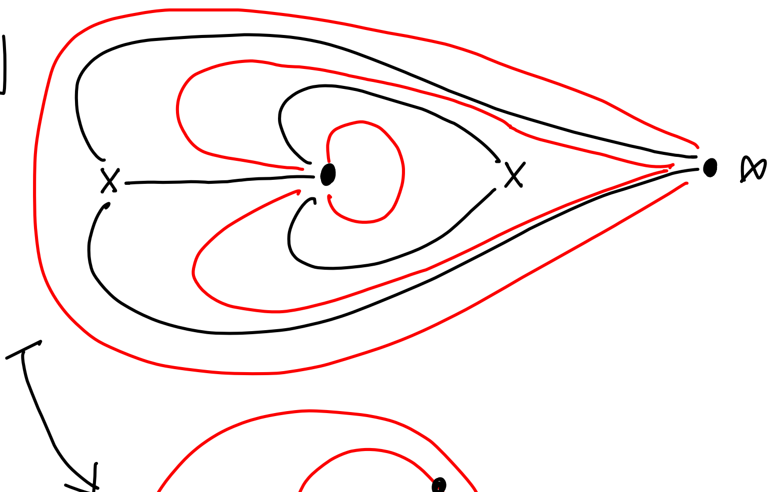
内辺に • 頂点

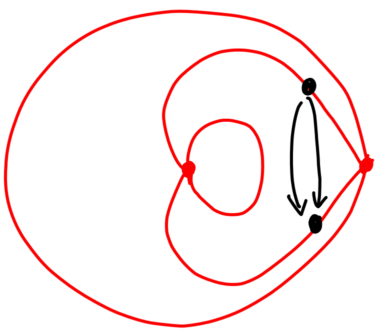


各三角形に対して時計まわりに矢を書く

$\boxed{\text{他の例}}$ $Q(x)\,dx^2 = \dfrac{x^2+ax+b}{x^3}\,dx^2$ $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\infty \end{array}\right\}$ ともに3位の極

x平面



 $\longmapsto$  $A_1^{(1)}$型

得られた箙の各頂点にラベル $1,2,\dots,n$ を付ける.

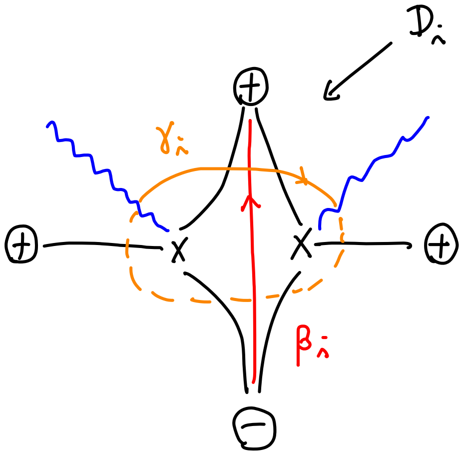
すなわち $\underbrace{\text{四辺形の Stokes 領域}}_{n\text{個だとする.}}$ にラベル $1,2,\dots,n$ を付ける.

以上によって, $B=[b_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ が得られた. $B=[b_{ij}] \longleftrightarrow$ quiver

i 番目の四辺形 Stokes 領域を D_i と表わす.

$\left\{ \begin{array}{l} \oplus \\ \ominus \end{array} \longleftrightarrow \mathrm{Re}\int^x \sqrt{Q}\,dx \begin{array}{l} >0 \\ <0 \end{array} \right.$

ブランチのとり方



$\longmapsto$ 2つの Voros 係数

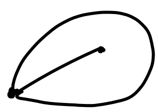
$$\left\{ \begin{array}{l} W_{\beta_i} := \int_{\beta_i} \left(P_{odd}(x,\hbar) - \hbar^{-1}\sqrt{Q(x)} \right) dx \\ V_{\gamma_i} := \oint_{\gamma_i} P_{odd}(x,\hbar)\,dx \end{array} \right.$$

- β_i は $\mathrm{Re}\int^x \sqrt{Q}\,dx$ が増加する方向に向きを付ける.
- γ_i は $\langle \gamma_i, \beta_i \rangle = +1$ となる向きであるとする.

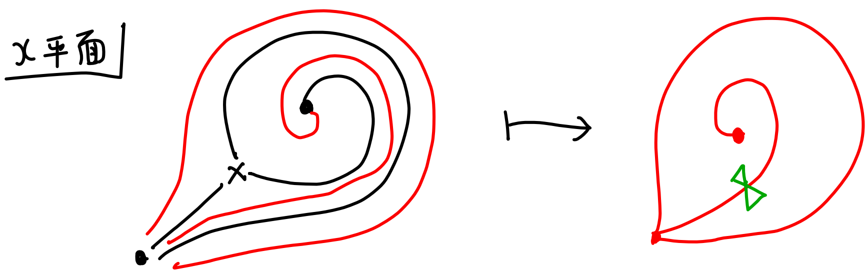
  交点形式は $\langle x\text{軸}, y\text{軸} \rangle = +1$ と定める.

注 ブランチの second sheet に β_i を covering involution $\sigma: \Sigma \rightrightarrows \Sigma$ でうつすと, $\tilde{\beta}_i := -\sigma_* \beta_i$ も上の条件をみたすが, $P_{odd}(\sigma(x),\hbar) = -P_{odd}(x,\hbar)$ なので $W_{\tilde{\beta}_i} = W_{\beta_i}$ となる. $\langle \gamma_i, \tilde{\beta}_i \rangle = +1$ となることにも注意せよ.

注 2位の極があると, ちょっと微妙なことがあって,



self-fold な三角形が現れ得る.

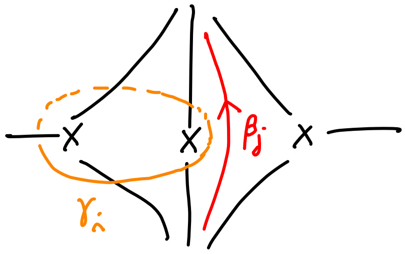


"タグ付き三角形分割"

これが生じているときには β_i, γ_i の取り方をうまく修正する必要がある.

かなりテクニカル

補題



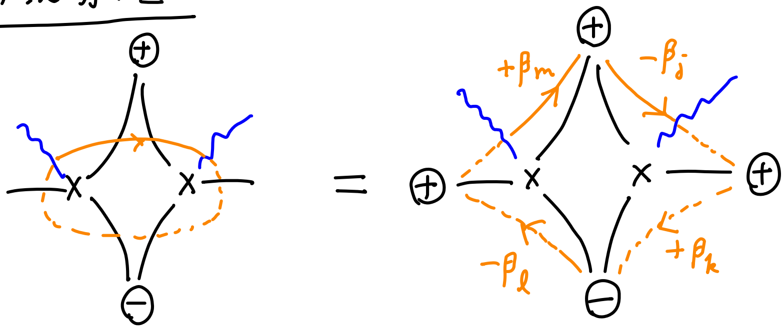
β_j どうしは端点でのみ交わる ← 極

① $\langle \gamma_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$

② $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = b_{ij}$

③ $\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \beta_i$

③の説明の図



x_i, $\hat{y}_i$ と次のように定める：

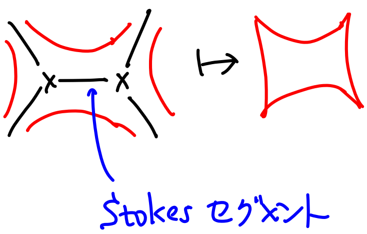
$$\begin{cases} x_i := \mathcal{S}_\theta[\exp(W_{\beta_i})] \\ \hat{y}_i := \mathcal{S}_\theta[\exp(V_{\gamma_i})] \end{cases} \qquad W_{\beta_i} := \int_{\beta_i} (P_{odd} - \hbar^{-1}\sqrt{Q})\,dx, \quad V_{\gamma_i} := \oint_{\gamma_i} P_{odd}\,dx$$

補題の③より

$$\hat{y}_i = y_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_{ji}}, \quad \text{where} \quad y_i := \exp\left(\frac{1}{\hbar}\oint_{\gamma_i}\sqrt{Q(x)}\,dx\right).$$

まとめ　θ を決めるごとに（Stokesセグメントがなければ）$Q(x)dx^2$ から
種 $(B, x, y) = ([b_{ij}], (x_i), (y_i))$ が得られた。

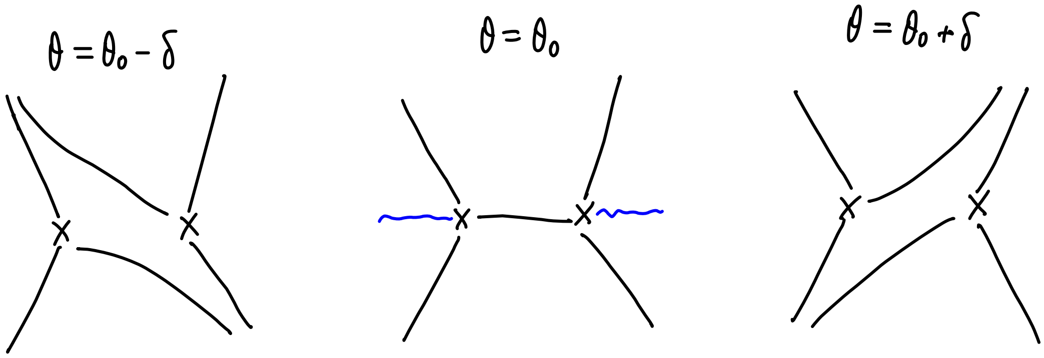
㊟ Stokesセグメントがあると、$\mathcal{S}_\theta[\ ]$ がうまく定義されない。
三角形分割もできなくなる



四角形ができてしまう

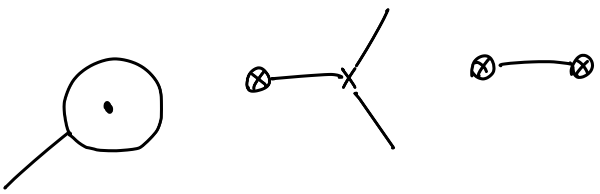
Stokesグラフの変異

ある方向θ_0におけるStokesグラフにStokesセグメントが生じたとする.



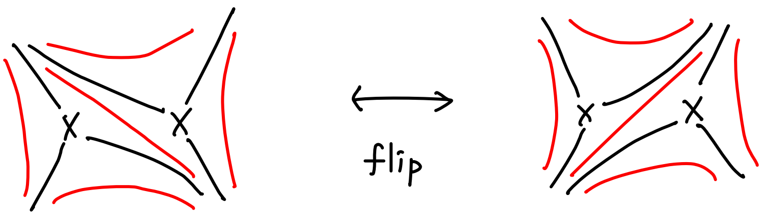
これをStokesグラフのmutationと呼ぶ.

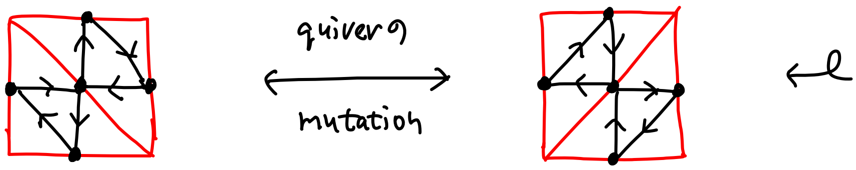
Stokesグラフの出現に応じて, Stokesグラフが不連続に変化することを"Stokesグラフの変異"と呼ぶ.



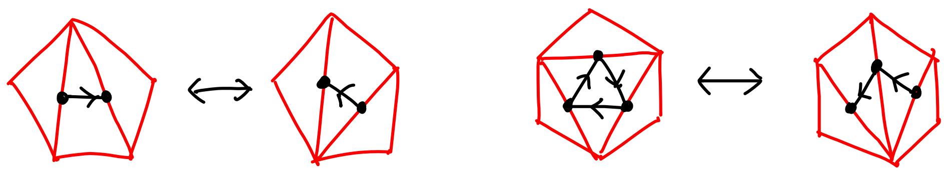
も mutation をおこす.

Stokesセグメントが2つの異なる変わり点を結んでいるとき,

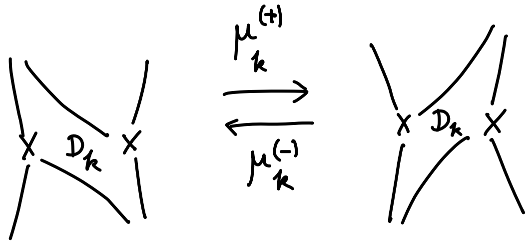




これはBのmutationを再現する



$\theta=\theta_0-\delta$ $\qquad\qquad$ $\theta=\theta_0+\delta$



$\varepsilon=\pm1$ を固定し，

(B,x,y) を $\theta=\theta_0-\varepsilon\delta$ のときの種，

(B',x',y') を $\theta=\theta_0+\varepsilon\delta$ のときの種

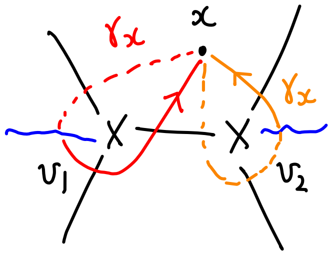
とする．

$\boxed{\text{定理}}$ (Iwaki-Nakanishi 2014)

(B,x,y) と (B',x',y') は符号付きの変異で移り合う． $\square$

$\boxed{\text{鍵となる事実}}$

定理 (cf. Delabaere-Dillinger-Pham 93, Aoki-Kawai-Takei 08)



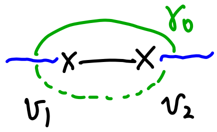
$\psi_\pm$: v_1 または v_2 で正規化 （左回の γ_x で正規化）

↑

どちらでも以下が成立

このとき， $\mathcal{S}_{\theta_0+\varepsilon\delta}[\psi_\pm]=\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon\delta}[\psi_\pm]\left(1+\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon\delta}[e^{V_{\gamma_0}}]\right)^{\mp\frac{1}{2}\langle\gamma_0,\gamma_x\rangle}$

ただし，



の向きは $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\oint_{\gamma_0}\sqrt{Q}\,dx\right)<0$ となるように定める．

$$\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon\delta}[e^{V_{\gamma_0}}]\underset{\hbar\to0}{\sim}\underbrace{\exp\left(\frac{1}{\hbar}\oint_{\gamma_0}\sqrt{Q}\,dx\right)}(1+O(\hbar))$$

← 指数的に小さい

（注 べきの $\frac{1}{2}$ は $\int_v^x P_{\mathrm{odd}}\,dx\overset{\mathrm{def.}}{=}\frac{1}{2}\int_{\gamma_x}P_{\mathrm{odd}}\,dx$ の $\frac{1}{2}$ から来ている．）

Cor. $\forall\gamma\in H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$ $\forall\beta\in H_1(\Sigma,\mathbb{P};\mathbb{Z})$, ← (DDP 93)

$$\mathcal{S}_{\theta_0+\varepsilon\delta}\underset{e^{W_\beta}}{[e^{V_\gamma}]}=\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon\delta}\underset{e^{W_\beta}}{[e^{V_\gamma}]}\left(1+\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon\delta}[e^{V_{\gamma_0}}]\right)^{-\langle\gamma_0,\underset{\beta}{\gamma}\rangle}$$

証明は Weber の場合の計算の帰着するという方法を使う、

$\boxed{\text{Weber}}$ $Q(x)=\frac{x^2}{4}-E$ のとき、

$$W_\beta = \sum \frac{(2^{1-2n}-1)B_{2n}}{2n(2n-1)}\left(\frac{\hbar}{E}\right)^{2n-1}$$ であり、

これの Borel 変換は周期的に特異点を持つ。

$\boxed{\text{一般の場合}}$ Weber の場合に帰着

$$\left(1+\mathcal{S}_{\theta_0-\varepsilon\delta}[e^{V_{\gamma_0}}]\right)^k \underset{\hbar\to0}{\sim} 1+k\underbrace{e^{V_{\gamma_0}}}_{\substack{\parallel \\ \exp\left(\frac{1}{\hbar}\oint_{\gamma_0}\sqrt{Q}\,dx\right) \\ \times(1+O(\hbar))}}+\binom{k}{2}\underbrace{e^{2V_{\gamma_0}}}_{\substack{\parallel \\ \exp\left(\frac{2}{\hbar}\oint_{\gamma_0}\sqrt{Q}\,dx\right) \\ \times(1+O(\hbar))}}+\cdots$$

特異点の位置

$\boxed{\text{結論の式}}$

$$x_i' = \begin{cases} x_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^n x_j^{[-\varepsilon b_{jk}]_+}\right)\underbrace{\left(1+\hat{y}_k^{\varepsilon}\right)}_{\text{DDP公式より}} & (i=k) \\ x_i & (i\neq k)\end{cases}$$

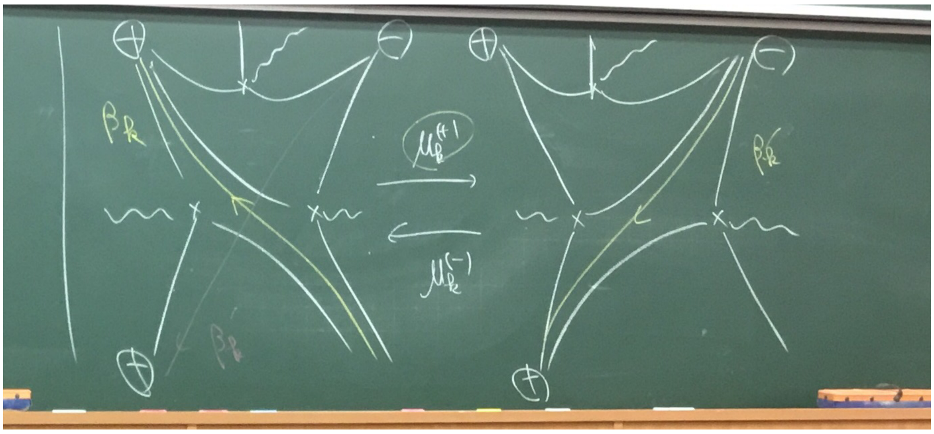
$$\hat{y}_i' = \begin{cases} \hat{y}_k^{-1} & (i=k) \\ \hat{y}_i\hat{y}_k^{[\varepsilon b_{ki}]_+}\underbrace{\left(1+\hat{y}_k^{\varepsilon}\right)^{-b_{ki}}}_{\text{DDP公式より}} & (i\neq k)\end{cases}$$

$1+\hat{y}_k^{\varepsilon}$ の因子は Stokes 現象を記述

モノミアルの mutation 部分の説明は以下の通り。（～～ 以外の部分の説明）

次ページにつづく

鍵となる事実2



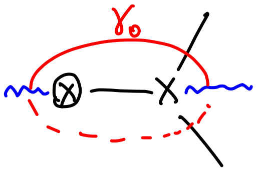
命題

$$\beta'_i = \begin{cases} -\beta_k + \sum_{j=1}^{n} [-\varepsilon b_{jk}]_+ \beta_j & (i=k) \\ \beta_i & (i \neq k) \end{cases}$$

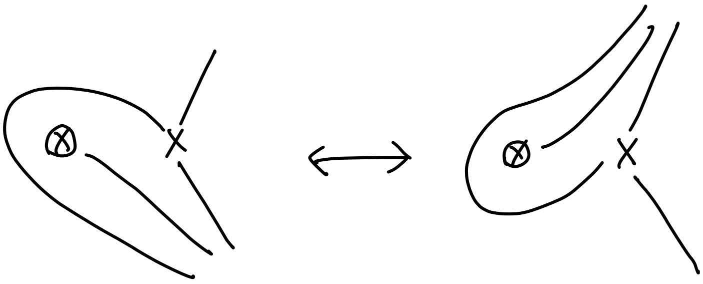
これは パス/サイクルの変異である。

パス/サイクルの変異が モノミアルパートの変異を記述している。

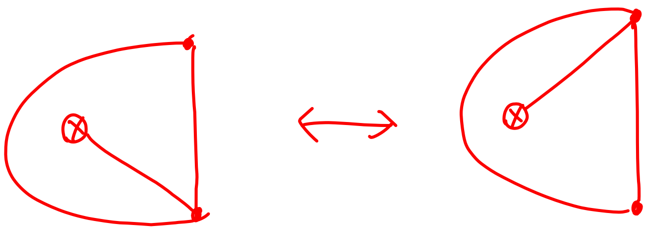
注



単純極 ⊗ がある場合



orbifold point をもつ曲面の三角形分割



$\longmapsto$ 一般クラスター代数 [Iwaki-Nakanishi 15]

定理 (I-N 2015)

a は Koike 2000の公式に現われた量

$$S_{+\delta}[e^{V_\gamma}] = S_{-\delta}[e^{V_\gamma}]\left(1 + a S_{-\delta}[e^{V_{\gamma_0}}]\right)^{-\langle \gamma_0, \gamma \rangle}\left(1 + a^{-1} S_{-\delta}[e^{V_{\gamma_0}}]\right)^{-\langle \gamma_0, \gamma \rangle}$$

□

$a = 1 \Longleftrightarrow$ 特性指数の差 $\in \mathbb{Z}$

a は確定特異点の情報を持っている。

もともとのMotivation

Gaiotto-Moore-Neitzke にクラスターと関係があると書いてあった。

GMNでは $\hat{y}_{\underset{\wedge}{i}}$ が実現されていた。

$\hat{y}_{\underset{\wedge}{i}}$ は Fock-Goncharov 座標。

GMN に $\hat{y}_{\underset{\wedge}{i}}$ の作り方と IN の作り方はちがうが、ある場合には一致する。